



49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKÁVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Anna összeadta 1-től 17-ig a pozitív egész számokat. Bella összeadta 7-től 23-ig a pozitív egész számokat. Mennyivel nagyobb Bella összege, mint Anna összege?

Megoldás. Anna és Bella is 17 darab számot adott össze. Bella összeadásában mindegyik szám 6-tal nagyobb, mint a megfelelő szám Anna összeadásában. Ezért Bella összege $17 \cdot 6 = 102$ -vel nagyobb Anna összegénél.

2. megoldás. $1 + 2 + \dots + 17 = 153$ és $7 + 8 + \dots + 23 = 255$, így a különbség: $255 - 153 = 102$.

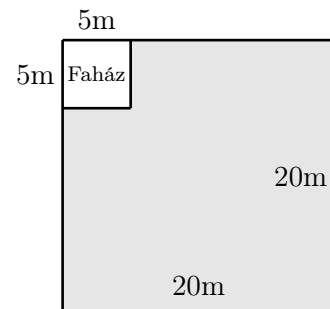
2. Juss el a 777-ről a 666-ra úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.

(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$ -re, a $183 - 8 = 175$ -re és a $183 - 3 = 180$ -ra lehet egy lépésben eljutni.)

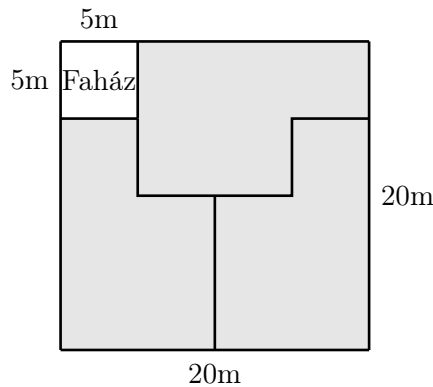
Megoldás. Egy lehetőség:

$$777 \xrightarrow{-7} 770 \xrightarrow{-7} \dots \xrightarrow{-7} 700 \xrightarrow{-7} 693 \xrightarrow{-3} 690 \xrightarrow{-6} 684 \xrightarrow{-6} 678 \xrightarrow{-6} 672 \xrightarrow{-6} 666$$

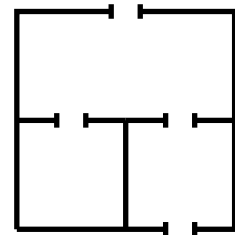
3. Három fiú örököl egy 20 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telk többi részén szántó föld van. A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú összefüggő részt kapjon. Mutass példát egy ilyen felosztásra.



Megoldás



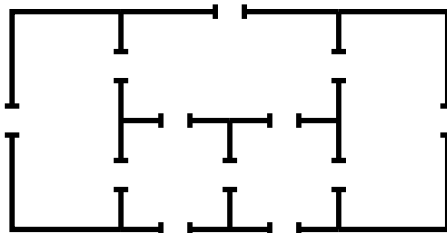
4. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
- A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 12 ajtó van.
- (Az ábra egy 3-szobás 4-ajtós lakásra mutat példát).



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

Megoldás. Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ ajtó lehetne, ez összesen legfeljebb csak 10 ajtó.

Öt szobával megoldható:





5. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7. Hány pontot szerezhettek a negyedik csapat?

Megoldás. Biztos, hogy a 7 pontos csapat kétszer nyert, egyszer döntetlent játszott, míg az 1 pontos csapat egyszer döntetlen játszott és kétszer veszített. (Máshogyan nem lehet szerezni 7, illetve 1 pontot.)

A 3 pontos csapat kétféleképpen gyűjthette össze pontjait:

- (1) három döntetlent játszott,
- (2) egyszer nyert és kétszer veszített.

Az (1) esetben az 1 pontos és a 7 pontos csapat is a 3 pontossal játszott egyetlen döntetlenjét. Következésképpen, a negyedik csapat legyőzte az 1 pontosat és kikapott a 7 pontostól, így összesen 4 pontot gyűjtött.

A (2) esetben a 3 pontos csapat az 1 pontosat legyőzte, míg a 7 pontostól kikapott (hiszen nem játszott döntetlent). Így a negyedik csapat ellen kellett a másik vereségét elszenvednie. Az 1 pontos és a 7 pontos csapat mérkőzése kétféleképpen érhetett véget:

- (2a) a 7 pontos csapat legyőzte az 1 pontosat,
- (2b) döntetlen.

A (2a) esetben 7 pontos és az 1 pontos csapat is a negyedik csapat ellen játszott az egyetlen döntetlenjét. Így ekkor a negyedik csapat 5 pontot gyűjtött.

A (2b) esetben a negyedik csapat is legyőzte az 1 pontosat, és kikapott a 7 pontostól. Ekkor tehát a negyedik csapat 6 pontot gyűjtött.

Ezzel minden lehetőséget megvizsgáltunk, a negyedik csapat 4, 5 vagy 6 pontot gyűjthetett.

A megoldás során mindhárom esetben megadtuk mind a hat meccs kimenetelét, könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg a kívánt pontszámokat szolgáltatják.

Megjegyzés: Mindhárom eset megvalósulására hozható példa az elmúlt évtized kontinentális labdarúgó-bajnokságaiból.

Példa 6 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság D csoportja.

	CRO	ESP	TUR	CZE	Gy	D	V	Gk	P
Horvátország (CRO)	–	2-1	1-0	2-2	2	1	0	+2	7
Spanyolország (ESP)	1-2	–	3-0	1-0	2	0	1	+3	6
Törökország (TUR)	0-1	0-3	–	2-0	1	0	2	–2	3
Csehország (CZE)	2-2	0-1	0-2	–	0	1	2	–3	1



Példa 5 pontos negyedik csoportra: a 2016-os Európa-bajnokság A csoportja.

	FRA	SUI	ALB	ROM	Gy	D	V	Gk	P
Franciaország (FRA)	–	0-0	2-0	2-1	2	1	0	+3	7
Svájc (SUI)	0-0	–	1-0	1-1	1	2	0	+1	5
Albánia (ALB)	0-2	0-1	–	1-0	1	0	2	–2	3
Románia (ROM)	1-2	1-1	0-1	–	0	1	2	–2	1

Példa 4 pontos negyedik csoportra: a 2013-as Afrikai nemzetek kupája B csoportja.

	GHA	MAL	COD	NIG	Gy	D	V	Gk	P
Ghána (GHA)	–	1-0	2-2	3-0	2	1	0	+4	7
Mali (MAL)	0-1	–	1-1	1-0	1	1	1	0	4
Kongói DK (COD)	2-2	1-1	–	0-0	0	3	0	0	3
Niger (NIG)	0-3	0-1	0-0	–	0	1	2	–4	1

2. megoldás: A 4 csapat összesen 6 mérkőzést játszott le. Ha egy meccs eldőlt (azaz valamelyik csapat győzelmével ért véget), akkor 3 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Ha viszont egy meccs döntetlennel ért véget, akkor 2 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Így ha az eldőlt meccsek számának háromszorosához hozzáadjuk a döntetlenek számának kétszeresét, akkor megkaptjuk a négy csapatnak összesen kiosztott pontok számát.

A 7 pontos csapatnak két győzelme és egy döntetlenje van. Így legalább egy meccs döntetlen lett. Az 1 pontos csapatnak van két veresége, melyek közül az egyiket nem a 7 pontostól szenvedte el, így a 7 pontos győzelmével együtt legalább 3 meccs eldőlt. Tehát a következő esetek valamelyike áll fenn:

- 5 eldőlt és 1 döntetlen meccs. Ekkor összesen $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $17 - (1 + 3 + 7) = 6$ pontja van.
- 4 eldőlt és 2 döntetlen meccs. Ekkor összesen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $16 - (1 + 3 + 7) = 5$ pontja van.
- 3 eldőlt és 3 döntetlen meccs. Ekkor összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $15 - (1 + 3 + 7) = 4$ pontja van.

Ezen esetek mindegyikére megadható konstrukció, például a fenti megjegyzésben látható módon.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.