



49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20?

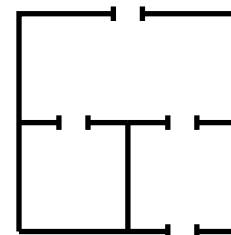
Megoldás Fel kell bontanunk a 20-at legfeljebb négy darab egyjegyű szám szorzatára. Ha négy tényezőt használunk, akkor legalább az egyiknek egynek kell lennie, különben nem tudnánk 2020-nál kisebb négyjegyű számot összeállítani a számokból. Azt is láthatjuk, hogy a négyjegyű megoldásoknak 1-essel kell kezdődnie.

Soroljuk fel a lehetséges felbontásokat, felhasználva, hogy $20 = 2^2 \cdot 5$:

- $20 = 5 \cdot 4$, a lehetséges számok: 45, 54
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$, a lehetséges számok: 145, 154, 415, 451, 514, 541
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1145, 1154, 1415, 1451, 1514, 1541
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, a lehetséges számok: 225, 252, 522
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1225, 1252, 1522

Összesen 20 pozitív egész felel meg a feladat feltételeinek.

2. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
- A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 15 ajtó van.
- (Az ábrán egy 3-szobás 4-ajtós lakásra látható példa.)



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

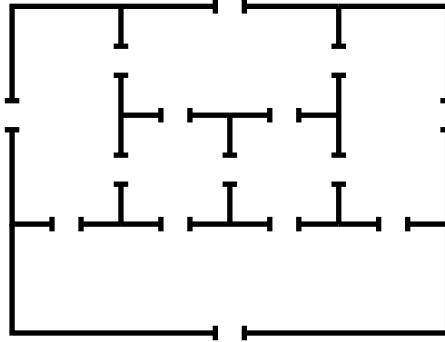
Megoldás. Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne. A lakáson belül az ajtók két szobához tartoznak, két szobát pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ féle módon lehet kiválasztani, azaz az ajtók száma legfeljebb 6. Ez összesen legfeljebb 10 ajtó.

Ha a lakásban öt szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 5 ajtó vezethetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $5 \cdot 4/2 = 10$ ajtó lehetne. Így 15 ajtót csak úgy kaphatnánk, ha bármely két szoba között lenne pontosan egy. Ez azonban lehetetlen. Válasszunk ki egy szobát, innen

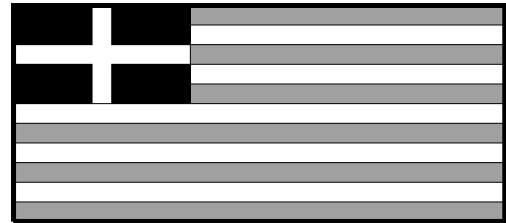


négy ajtó nyílna a négy másik szobába. A négy ajtó között van két nem szomszédos, az ezeken át elérhető szobáknak viszont nem lehet közös faluk, így ajtajuk sem.

Hat szoba esetén elérhető a 15 ajtó, például így:



3. Bergengócia zászlaja (lásd az ábrát) 11 egyenlő vastag vízszintes sávot tartalmaz, melyek felváltva szürkék és fehérek, szürkével kezdve. A zászló bal felső sarkában egy öt sáv magas, fekete színű, téglalap alakú mezőben egy fehér kereszt található. A kereszt szárainak vastagsága megegyezik a sávok vastagságával.



Tudjuk, hogy a zászló szürke területeinek összege pontosan az ötszöröse a fekete területek összegének. A zászló 175 cm hosszú és 55 cm széles. Hány cm^2 a zászló fehér területeinek összege?

Megoldás. Legyen egy fekete téglalap hosszúsága x cm, a szélességük két sáv vastagságával, azaz $55 : 11 \cdot 2 = 10$ cm-rel egyezik meg. Ekkor a kereszt melletti sávok hosszúsága (cm-ben) $175 - (2x + 5) = 170 - 2x$.

Így a szürke terület (cm^2 -ben): $3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175$.

Mivel ez ötszöröse a fekete területnek, így

$$3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 = 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot x$$

$$2550 - 30x + 2625 = 200x$$

$$5175 = 230x$$

$$x = \frac{5175}{230} = \frac{45}{2}$$

Innen a fehér terület:

$$2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 = 4225 \text{ cm}^2.$$



4. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatúnak* nevezünk, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.)
- (a) Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.
- (b) Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám?

Megoldás

Az (a) részre sokféle példa adható. Például $486 = 2 \cdot 3^5$ megfelelő szám. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1 < 2 < 3 < 6 < 9 < 18 < 27 < 54 < 81 < 162 < 243 < 486.$$

A konstrukció lényege, hogy ha $x < 486$ egy páratlan osztó, akkor $x < 2x < 3x$, ahol $2x$ és $3x$ is osztó, és a $2x$ osztón kívül más osztó nem esik x és $3x$ közé.

A $486 = 2 \cdot 3^5$ számhoz hasonlóan, minden $2 \cdot 3^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$), sőt minden $2 \cdot p^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$ és p egy páratlan prímszám) jó példát szolgáltat.

Egy másik jó példa: $1806 = 42 \cdot 43$. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 258, 301, 602, 903, 1806.$$

Ez a példa működésének kulcsa következő észrevétel: ha egy n páros szám váltakozó osztósorozatú, míg p egy n -nél nagyobb prímszám, akkor $p \cdot n$ is váltakozó osztósorozatú lesz. Ilyenkor ugyanis $p \cdot n$ osztóinak növekedő sorozata úgy állítható elő, hogy az n sorozatának végére odaírjuk mégegyszer ugyanezt a sorozatot, csak minden tagot p -szeresére növelve.

A két eddig bemutatott módszer ötvözésével kapható meg a legkisebb váltakozó osztósorozatú szám, amelynek legalább 12 osztója van. Ez a $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342.$$

A (b) rész kérdésére a válasz: nincs.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik 1-nél nagyobb nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám, ezt jelölje n . Világos, hogy n páros szám kell legyen, különben az összes osztója páratlan volna. Innen többféleképpen ellentmondáshoz tudunk jutni:

(1. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. n növekedő osztósorozatának a vége így fog kinézni: $\dots, \frac{n}{2}, n$. Ezek között már nem lehet egyéb osztó, hiszen n -t vele elosztva a hányados 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb lenne, nem lehetne egész. Mivel n osztható 4-gyel így $\frac{n}{2}$ és n egyaránt páros számok, nem teljesül a váltakozás. Ellentmondás.



(2. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. Ekkor minden p páratlan osztójához p páratlan osztóhoz hozzárendelhetjük a $2p$ és $4p$ osztóit. Így minden páratlan osztóhoz két páros osztót rendeltünk hozzá (különböző páratlan számokhoz különböző párosakat), így legalább kétszer annyi páros osztója van n -nek, mint páratlan. Márpedig az 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú számoknak nem lehet több páros osztója, mint páratlan, hiszen a növekvő sorozatban felváltva jönnek a páratlan és a páros osztók, és a sorozat első tagja páratlan. Ellentmondás.

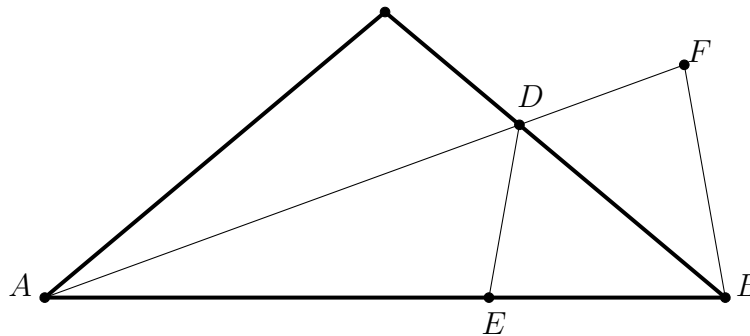
(3. gondolatmenet) A négyzetszámoknak páratlan sok osztójuk van. (Ez az állítás közismert, a versenyen elfogadjuk külön bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy osztópárokkal a bizonyítás sem nehéz.) Mivel az n legkisebb osztója (az 1) páratlan és váltakozva következnek, ezért a növekvő sorrendben páratlanodik osztók mind páratlanok lesznek. De így a legnagyobb osztó, n maga is páratlan kell legyen. Ellentmondás.

5. Az egyenlő szárú ABC háromszög C -nél lévő szöge 100° . Az A -ból húzott szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AD + DC = AB$.

1. megoldás. Mivel C -nél tompaszög van, így csak $AC = BC$ lehetséges. Emiatt $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle = 40^\circ$, így $CAD \sphericalangle = DAB \sphericalangle = 20^\circ$.

Jelölje a C pontnak az AD egyenesre vett tükörképét E . Az AD szögfelező tulajdonsága miatt E az AB egyenesre esik.

Hosszabbítsuk meg D -n túl az AD szakaszt, és a meghosszabbításon vegyük fel az F pontot úgy, hogy $DC = DE = DF$ teljesüljön. Ekkor $AED \sphericalangle = 100^\circ$, $CDE \sphericalangle = 360^\circ - (100^\circ + 20^\circ + 100^\circ) = 120^\circ$, továbbá a tükrözés miatt $CDF \sphericalangle = EDF \sphericalangle$, így ezek a szögek is 120° -osak. Mivel $EDB \sphericalangle = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, a BC egyenes felezi az EDF szöget.

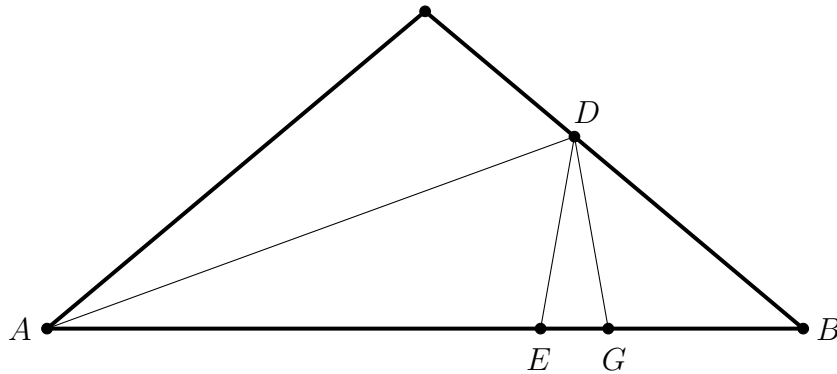


Így $DF = DE$ miatt az F pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe E , tehát $DFB \sphericalangle = DEB \sphericalangle = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, így viszont $FBA \sphericalangle = 180^\circ - (80^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$. Tehát az ABF háromszög egyenlő szárú, így $AB = AF = AD + DF = AD + DC$.

2. megoldás

Az 1. megoldáshoz hasonlóan megállapítjuk az ABC háromszög szögeinek nagyságát.

Vegyük fel az AB oldalon a G pontot úgy, hogy $AD = AG$ teljesüljön. Az ADF egyenlő szárú háromszög szögei 20° , 80° , 80° (az A , D és G csúcsoknál).



Így a BDG háromszög szögeit is ki tudjuk számolni: a G csúcsnál 100° -os a szög, a B csúcsnál 40° -os (az eredeti háromszögből), így a D csúcsnál is 40° -os a szög.

Ezek alapján a BDG háromszög egyenlő szárú, $BG = DG$. Azt kéne tehát még belátni, hogy $DG = DC$. Tükrözzük a C pontot a szögfelezőre, így kapjuk az E pontot az AB szakaszon. Az eddigiekhez hasonló egyszerű szögszámolással meg lehet kapni, hogy a DEG háromszög is egyenlő szárú, így $DE = DG$, a tükrözés miatt pedig $DE = DC$, így készen vagyunk.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.